Fonctions périodiques et séries de Fourier

On démontre que toute fonction g(t), périodique de période T (de pulsation $\omega = 2\pi/T$ et de fréquence f = 1/T) et satisfaisant à certaines conditions de continuité et de dérivabilité, peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales dite « série de FOURIER » :

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt)$$

$$\text{avec :} \quad a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T g(t).dt \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t).\cos \omega nt.dt \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t).\sin \omega nt.dt$$

Quelques exemples utiles :

Fonction créneau symétrique ($T = 2\pi$) : $$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi.t}{(2n+1)}$$

Fonction triangulaire symétrique : $$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)\pi.t$$

Rampe : $$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi.t$$

Sinusoïde redressée simple alternance : $$g(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin \omega t - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega t}{(2n-1)(2n+1)}$$

Sinusoïde redressée double alternance : $$g(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\omega t}{(n+1)^2 - 1/4}$$

Impulsions : $$g(t) = \alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi.\alpha \ . \cos n\omega t}{n} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\cos 2\pi.\alpha) \ . \sin n\omega t}{n}$$

Si la fréquence de la fonction g(t) est f_0, le terme de fréquence f_0 du développement est appelé fondamental Le terme de fréquence $n.f_0$ est l'harmonique d'ordre n.

La vitesse de convergence de la somme de Fourier en fonction du nombre d'harmoniques est variable selon la fonction étudiée. Pour les systèmes physiques réels, il faut limiter le nombre des harmoniques en fonction de la bande passante du dispositif étudié.