Potentiel de Morse

On étudie le mouvement d'une particule de masse m soumise à une force F(x) qui dérive d'un potentiel de Morse Ep(x).

$$Ep(x) = H\left((1-e^{-kx})^2 - 1\right)$$

L'expression de la force est :

$$F(x) = \frac{dEp}{dx} = -2.k.H.(1-e^{-kx}).e^{-kx}$$

La conservation de l'énergie permet d'écrire que :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + H(1-e^{-kx})^2 = E + H$$

On pose $\tau = (E + H) / H$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\tau - (1-e^{-kx})^2\right).\frac{2H}{m}$$

Cas $\tau < 1$

On fait le changement de variable

$$e^{kx} = \frac{1-\sqrt{\tau}.u}{1-\tau} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-\sqrt{\tau}}{k(1-\sqrt{\tau}.u)}\frac{du}{dt}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2.H.(1-\tau)}{m}(1-u^2)$$

On pose :

$$\eta = \sqrt{\frac{2k^2.H.(1-\tau)}{m}}$$

Donc :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \eta\int dt$$

Dont la solution est : $\arccos(u) = \eta(t - ti)$ soit : $u = \cos(\eta(t - ti))$

ti est une constante choisie pour que x = 0 si t = 0,

Soit finalement :

$$x = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{1-\sqrt{\tau}.\cos\left(\eta\left(t - ti\right)\right)}{1-\tau}\right)$$

avec :

$$ti = \frac{1}{\eta}\arccos\left(\sqrt{\tau}\right)$$

Cas $\tau > 1$

On fait le changement de variable

$$e^{kx} = \frac{\sqrt{\tau}.u - 1}{\tau - 1} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{\tau}}{k(\sqrt{\tau}.u - 1)}\frac{du}{dt}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2.H.(\tau - 1)}{m}(u^2 - 1)$$

On pose :

$$\eta = \sqrt{\frac{2k^2.H.(\tau - 1)}{m}}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \eta \int dt$$

Dont la solution est : arccosh(u) = η(t – ti) soit : u = cosh(η(t – ti))
ti est une constante choisie pour que x = 0 si t = 0,
Soit finalement :

$$x = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{\sqrt{\tau}.\cosh\left(\eta\left(t - ti\right)\right) - 1}{\tau - 1}\right)$$

avec :

$$ti = \frac{1}{\eta}\operatorname{arccos h}\left(\sqrt{\tau}\right)$$

Cas τ = 1
On fait le changement de variable

$$e^{k.x} = u \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k.u}\frac{du}{dt}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{2.k.H}{m}(2.u - 1)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{2.u - 1}} = \eta \int dt \quad \text{avec :} \quad \eta = \sqrt{\frac{2k^2H}{m}}$$

$$2.u - 1 = \left(\eta\, t - \eta\, ti\right)^2$$

$$x = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{1 + \left(\eta\, t - \eta\, ti\right)^2}{2}\right) \quad \text{avec :} \quad ti = \frac{1}{\eta}$$