# Ondes d'étendue limitée

## Onde progressive sinusoïdale :

Une onde sinusoïdale infinie à une dimension peut être représentée par l'équation :

$$\Psi = \Psi_0 \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

$\omega$ est la pulsation, $k = 2\pi/\lambda$ le vecteur d'onde ; le quotient **$c = \omega/k$ est la vitesse de phase** de l'onde. Cette vitesse peut dépendre de la fréquence et on peut caractériser cette dépendance par la relation **$\omega = f(k)$** dite <u>relation de dispersion</u>.

## Superposition d'onde sinusoïdales de même amplitude :

Au temps origine, on fait la somme de n + 1 ondes dont les vecteurs d'onde sont régulièrement répartis entre $k = k_1$ et $k = k_1 + \Delta k$. Si l'on pose $k_0 = k_1 + \Delta k/2$, les vecteurs d'onde sont répartis entre $k_0 - \Delta k/2$ et $k_0 + \Delta k/2$

Cette somme s'écrit : $\Psi = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Psi_0}{n+1} \sin\left[ -\left( k_1 + i\frac{\Delta k}{n} \right) x \right]$ (2)

Et sa valeur est : $\Psi = \frac{\Psi_0}{n+1} \frac{\sin(n+1)\frac{\Delta k}{2n} x}{\sin \frac{\Delta k}{2n} x} \sin(-k_0 x)$ (3)

(Pour faire ce calcul, passer en notation imaginaire et reconnaître une progression géométrique.)

En faisant tendre n vers l'infini, on tire : $\Psi = \Psi_0 \frac{\sin \frac{\Delta k}{2} x}{\frac{\Delta k}{2} x} \sin(-k_0 x)$ (4)

A l'instant initial, on obtient un « paquet » dont la « largeur » dans le domaine spatial est de l'ordre de $1/\Delta k$ (voir l'applet pour visualiser sa représentation)

> **En superposant une infinité de sinusoïdes de même amplitude, dont les vecteurs d'onde sont régulièrement répartis entre $k_0 - \Delta k/2$ et $k_0 + \Delta k/2$, on obtient une onde d'étendue limitée à $1/\Delta k$ de part et d'autre de l'origine.**

## Propagation du paquet d'onde

On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

a) $\Delta k$ est assez petit devant $k_0$

b) la courbe de dispersion est dérivable au voisinage de $k = k_0$.

On peut alors écrire : $\omega - \omega_0 = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} (k - k_0) = V_G (k - k_0)$

$V_G$ qui à la dimension d'une vitesse est la **vitesse de groupe**.

Nous étudions dans l'applet les 3 cas suivants :

$\omega = c.k$ (pour $k = k_0$, $V_G = \omega_0/k_0 = c$ pas de dispersion)

$\omega = \omega_0 \left( \frac{k}{k_0} \right)^2$ (pour $k = k_0$, $V_G = 2c$)

$$\omega = \omega_0 \left( \frac{k}{k_0} \right)^{1/2} \quad \text{(pour } k = k_0, V_G = c/2)$$

On fait à l'instant t, la somme de n + 1 sinusoïdes.

Pour la composante d'indice i, on a $k = k_1 + i\Delta k/n$ et $\omega = \omega_0 + V_G \left( -\frac{\Delta k}{2} + i \frac{\Delta k}{n} \right)$

A l'instant t, la forme du paquet d'onde est donnée par :

$$\Psi = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Psi_0}{n+1} \sin\left[ \omega_0 t - V_G \frac{\Delta k}{2} t - k_1 x + i \frac{\Delta k}{n} \left( V_G t - x \right) \right]$$

On tire par généralisation des relations (3) et (4) :

$$\Psi = \Psi_0 \frac{\sin \frac{\Delta k}{2} \left( x - V_G t \right)}{\frac{\Delta k}{2} \left( x - V_G t \right)} \sin(\omega_0 t - k_0 x)$$

Le paquet se déplace avec la vitesse $V_G$.

Remarque : A cause de l'assimilation de la courbe de dispersion à une droite, on n'observe pas dans ce cas l'étalement du paquet d'onde lors de sa propagation.