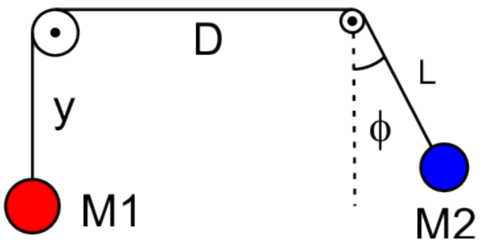
Oscillateur d'Atwood



On considère le système ci-contre constitué par deux masses M_1 et M_2 reliées par un fil inextensible de longueur y + D + L.
On suppose que le rayon de la poulie de droite est négligeable.
A l'instant t = 0, on libère la masse M_2 ($L = L_0$, $\Phi = \Phi_0$) avec une vitesse initiale radiale V_{R0} et une vitesse initiale normale V_{N0}

Rappels :

En coordonnées polaires, le vecteur vitesse (tangent à la trajectoire) s'exprime sous la forme

v = d**r** / dt = **r**.dL / dt + **A**r. d**A** / dt (**r** et **A** étant les vecteurs unitaires radiaux et tangentiels)

Les composantes du vecteur accélération sont :

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 \qquad a_A = r\frac{d^2A}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{dA}{dt}$$

Equations du mouvement :

Les forces agissant sur M_1 sont le poids M_1.g et la tension du fil T : $M_1\dfrac{d^2y}{dt^2} = M_1.g - T$ (1)

Les forces agissant sur M_2 sont le poids M_2.g et la tension du fil T .

Dans la direction radiale on a $M_2.a_r = M_2.g.\cos(\Phi) - T$ (2)

Dans la direction normale on a $M_2.a_A = - M_2.g.\sin(\Phi)$ (3)

On pose $K = M_1 / M_2$
L'élimination de T dans (1) et (2) conduit au système d'équations suivant :

$$(1+K)\frac{d^2L}{dt^2} = g(\cos\Phi - K) + L\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2$$

$$L\frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2\frac{dL}{dt}\frac{d\Phi}{dt} + g.\sin\Phi = 0$$

Les conditions initiales sont $L = L_0$, $\Phi = \Phi_0$, La vitesse radiale est $V_R = V_{R0}$ et la vitesse normale $V_N = V_{N0}$