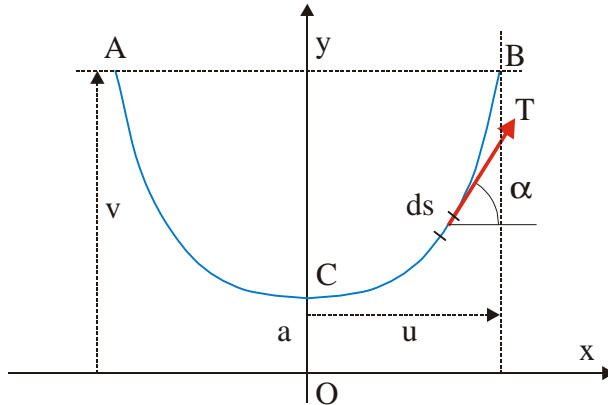


Chaînette

On considère un fil pesant ou une chaînette à maille fine de longueur $2L$ et dont la masse par unité de longueur est ρ . Le fil est suspendu entre les points A et B de coordonnées $(-u, v)$ et (u, v) . On recherche la forme du fil quand il n'est soumis qu'à son propre poids.



Soit T la tension du fil. La loi fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de fil de longueur dl donne :

$$\rho \cdot ds \cdot \vec{g} + d\vec{T} = 0$$

En projetant sur les axes Ox et Oy , on tire :

$$\frac{d}{ds}(T \cos \alpha) = 0 \quad ; \quad -\rho g + \frac{d(T \sin \alpha)}{ds} = 0$$

En intégrant, on a :

$$T \cos \alpha = H \quad \text{et} \quad T \sin \alpha = \rho g s + K$$

$$\text{Soit : } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho g s + K}{H}$$

$$s = \frac{H \operatorname{tg} \alpha - K}{\rho g} \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{H d\alpha}{\rho g \cos^2 \alpha}$$

mais : $dx = ds \cdot \cos \alpha$; $dy = ds \cdot \sin \alpha$

$$x = \int \cos \alpha \cdot ds = \frac{H}{\rho g} \int \frac{d\alpha}{\cos \alpha} \quad ; \quad y = \int \sin \alpha \cdot ds = \frac{H}{\rho g} \int \frac{\sin \alpha \cdot d\alpha}{\cos \alpha}$$

On pose $a = H/\rho g$.

$$x = a \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \right| + x_0 \quad ; \quad y = \frac{a}{\cos \alpha} + y_0$$

$$\exp \left(\frac{x - x_0}{a} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)}$$

$$\text{donc : } \exp \left(\frac{x - x_0}{a} \right) + \exp \left(-\frac{x - x_0}{a} \right) = \frac{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)} + \frac{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)} = \frac{2}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ch} \left(\frac{x - x_0}{a} \right) = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{a}$$

Finalement si les points A et B sont symétriques par rapport à Oy , on a :

$$y - y_0 = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

La valeur de a est fonction de la longueur $2L$ de la chaînette.

$$\text{On a : } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx \quad (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1)$$

$$\text{On intègre } ds \text{ entre C et B, il vient (AB = 2 u) : } L = \int_0^u \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \cdot \operatorname{sh} \frac{u}{a}$$

Pour résoudre cette équation, on pose $z = u/a$. Avec ce changement de variable, elle devient :

$$e^z - e^{-z} - 2Lz/u = 0$$

Cette équation transcendante est résolue numériquement et on en déduit $a = u/z$.

Il est alors possible de construire la chaînette.