Couplage d'un pendule et d'une masse

Une masse M peut glisser sans frottements sur un plan horizontal. Elle est liée à sur support fixe par un ressort de raideur K. Sur la masse M est articulé un pendule simple de longueur l et de masse m.
A l'équilibre, le ressort n'est ni comprimé ni tendu. Cette position correspond à l'origine des abscisses. Soit θ l'angle du pendule par rapport à la verticale.
On se place dans le cas ou l'angle θ est petit (sin(θ) =θ, cos(θ) = 1)

<u>Equations du mouvement :</u>

Forces : Mg, mg, action du ressort –Kx, Réaction du plan horizontal.
Masse M : position x, accélération x'' ;
Masse m : Position xm = x + lsin(θ) ≈ x + lθ ; ym = lcos(θ) ≈ l
Accélérations x'' + l.θ'' ; y'' = 0
La projection des forces sur Ox permet d'écrire :

$$(M+m)x''+ml\theta''+Kx=0$$

Les forces qui agissent sur le pendule sont son poids mg et la réaction inconnue du support.
Pour éliminer cette dernière, on calcule le moment des forces par rapport au point de suspension du pendule dans l'hypothèse ou θ est petit.

$$-mgl\sin(\theta)=m(x''+l\theta'').l\cos(\theta)$$

$$x''+l\theta''+g\theta=0$$

<u>Résolution des équations du mouvement :</u>

$$(M+m)x''+ml\theta''+Kx=0 \quad (a)$$

$$x''+l\theta''+g\theta=0 \quad (b)$$

On considère les solutions harmoniques

$$x=A.\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\theta=B.\sin(\omega t+\varphi)$$

En remplaçant x, x'', θ et θ'' par leur valeurs dans (a) et (b) on tire :

$$A\left(-\left(M+m\right)\omega^2+K\right)+B\left(-ml\omega^2\right)=0 \quad (c)$$

$$A\left(-\omega^2\right)+B\left(-l\omega^2+g\right)=0 \quad (d)$$

Ce système admet la solution triviale A = B = 0. Il n'existe d'autres solutions qui si le déterminant des coefficients est nul soit si :

$$Ml\omega^4-\left(\left(M+m\right)g+Kl\right)\omega^2+Kg=0$$

Cette équation possède 2 racines positives telles que

$$\omega_1^2<\omega_0^2<\omega_2^2 \quad \left(\omega_0^2=\frac{g}{l}\right)$$

La solution générale est donc :

$$x=A_1.\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2.\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

$$\theta=B_1.\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+B_2.\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

d'après (d) $\dfrac{A}{B}=\dfrac{g-l\omega^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow C_1=\dfrac{A_1}{B_1}=\dfrac{g-l\omega_1^2}{\omega_1^2}$ et $C_2=\dfrac{A_2}{B_2}=\dfrac{g-l\omega_2^2}{\omega_2^2}$

Pour déterminer les valeurs des constantes, on utilise les conditions initiales :
En t = 0 $x=x_0 \quad \theta=\theta_0 \quad x'=0 \quad \theta'=0$
Vérifier que :

$$x=\frac{C_1\left(C_2\theta_0-x_0\right)}{C_2-C_1}.\cos(\omega_1 t)-\frac{C_2\left(C_1\theta_0-x_0\right)}{C_2-C_1}.\cos(\omega_2 t)$$

$$\theta=\frac{\left(C_2\theta_0-x_0\right)}{C_2-C_1}.\cos(\omega_1 t)-\frac{\left(C_1\theta_0-x_0\right)}{C_2-C_1}.\cos(\omega_2 t)$$