Pendule simple amorti

On considère une masse m suspendue par un fil rigide de longueur L et de masse négligeable. On désigne par θ l'angle entre la verticale passant par le point O de suspension et la direction du fil. Le théorème du moment cinétique permet d'écrire :

$$mL^2.\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \qquad (1)$$

Comme on ne connaît pas de solution analytique rigoureuse pour cette équation, on fait souvent l'approximation des petits angles qui permet de confondre le sinus de l'angle avec la valeur de l'angle. Avec cette hypothèse, l'équation du mouvement devient : $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$.

On obtient un mouvement sinusoïdal de période $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

Dans le cas général, si θ_0 désigne l'amplitude initiale du pendule, on montre en faisant un développement en série que l'on peut approximer la période par la relation :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

Si l'on considère que le pendule est également soumis à un frottement visqueux de coefficient k, l'expression de l'accélération angulaire devient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta - \frac{k}{mL^2}\frac{d\theta}{dt} \qquad (2)$$

(Pour un frottement solide, la force de frottement est constante et opposée à $d\theta / dt$).

Dans l'approximation des petits angles, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\omega\frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0$$

Pour les amortissement faibles, la solution de cette équation est :

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda\omega t}\cos\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\omega t + \varphi\right)$$

Le système n'est plus périodique mais seulement « pseudo-périodique ».

A partir de la résolution numérique de l'équation (2), on trace la courbe de variation de l'amplitude en fonction du temps et la courbe donnant la variation de l'amplitude en fonction de la vitesse angulaire. On dit que cette dernière courbe est tracée dans l'espace des phases.