

# Ressort hélicoïdal

On considère un ressort hélicoïdal à spires non jointives. Soit  $L_0$  sa longueur quand il est horizontal et  $L_1$  sa longueur lorsqu'il est vertical et chargé par une masse  $M$ . Son allongement résulte de la torsion du fil qui constitue le ressort.

D'après la loi de Hooke le ressort est soumis à une force de rappel proportionnelle à son allongement et de sens opposé à la force ayant provoqué l'allongement. Si la limite d'élasticité est dépassée, il n'y a plus proportionnalité et le ressort ne retrouve pas sa forme initiale quand on retire la contrainte.

- Si la **masse  $m_0$  du ressort est négligeable** devant  $M$  on a la relation :

$$F = -Mg = -K(L_1 - L_0) = -Kx$$

- Si par contre cette masse n'est pas négligeable, on montre que :

$$F = -\left(M + \frac{m_0}{2}\right)g = -K(L_1 - L_0) = -Kx$$

La constante  $K$  du ressort s'exprime en N/m. C'est la **raideur** du ressort.

## Associations de ressorts

### Parallèle

Quand deux ressorts de raideurs  $K_1$  et  $K_2$  sont associés en parallèle (la fixation de la masse  $M$  impose que les deux ressorts s'allongent de la même longueur  $x$ ) la raideur du ressort équivalent est  **$K = K_1 + K_2$**

### Série

Sous l'action de la même contrainte, les allongements s'ajoutent donc la raideur du ressort

équivalent est :  $\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$

## Etude dynamique

Si on écarte la masse  $M$  de sa position d'équilibre, elle effectue un mouvement oscillant.

- Si  $M \gg m_0$  l'équation du mouvement est :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \text{ avec } \omega^2 = \frac{K}{M}$$

La période des oscillations est  $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$

- Si la masse de ressort ne peut être négligée, on a un système déformable avec propagation. On simplifie le problème en supposant que le ressort a la même forme que lors d'une déformation statique. On utilise la conservation de l'énergie pour déterminer la période du système.

Energie cinétique :

$$\text{Energie cinétique de } M : \frac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Energie cinétique du ressort :

On découpe le ressort en tranche d'épaisseur  $dy$  et de masse  $dm = m_0 \cdot y/L$ . La vitesse d'une tranche

$$\text{est } \frac{dx}{dt} \frac{y}{L} \text{ son énergie est } \frac{1}{2}m_0 \frac{dy}{L} \left(\frac{dx}{dt} \frac{y}{L}\right)^2$$

$$\text{En intégrant entre } 0 \text{ et } L, \text{ il vient } E_{\text{Cressort}} = \frac{1}{6}m_0\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Energie potentielle :

Pesanteur :  $-M \cdot g \cdot x - \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot g \cdot x$

Traction du ressort  $\frac{1}{2} \cdot K \cdot (x + L_1 - L_0)^2$

Conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} \left( M + \frac{m_0}{3} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - \left( M + \frac{m_0}{2} \right) \cdot g \cdot x + K \frac{(x + L_1 - L_0)^2}{2} = \text{Constante}$$

Après dérivation on tire :

$$\left( M + \frac{m_0}{3} \right) \frac{d^2x}{dt^2} = \left( M + \frac{m_0}{2} \right) \cdot g - K(x + L_1 - L_0)$$

Comme x est l'élongation du ressort à partir de sa position d'équilibre statique, on a finalement :

$$\left( M + \frac{m_0}{3} \right) \frac{d^2x}{dt^2} = -K \cdot x \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{m_0}{3}}{K}}$$

Il faut tenir compte d'un terme correctif égal au tiers de la masse du ressort.