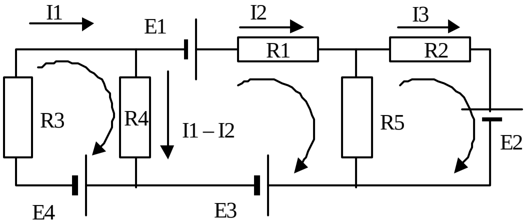
Enoncés Cours

Exercice 2.1



Courant dans R_4 : $I_1 - I_2$
Courant dans R_5 : $I_2 - I_3$
Il y a trois courants inconnus donc il faut étudier trois mailles.

maille 1 : $R_3.I_1 + R_4(I_1 - I_2) + E_4 = 0$

maille 2 : $- R_4(I_1 - I_2) - E_1 + R_1.I_2 + R_5(I_2 - I_3) + E_3 = 0$

maille 3 : $- R_5(I_2 - I_3) + R_2.I_3 + E_2 = 0$

Il faut résoudre le système :

$$\begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 25 & -10 \\ 0 & -10 & 15 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Lle déterminant vaut : $\Delta = 4000$. La méthode de Kramer donne :

$$I_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -2 & -10 & 0 \\ 2 & 25 & -10 \\ -12 & -10 & 15 \end{vmatrix} ; I_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 20 & -2 & 0 \\ -10 & 2 & -10 \\ 0 & -12 & 15 \end{vmatrix} ; I_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 20 & -10 & -2 \\ -10 & 25 & 2 \\ 0 & -10 & -12 \end{vmatrix}$$

$I_1 = - 0,3625$ A ; $I_2 = - 0,525$ A ; $I_3 = - 1,15$ A
Les trois courants réels circulent dans le sens opposé aux flèches.
La matrice est symétrique donc $M = M^T$. Son inversion donne :

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 275 & 150 & 100 \\ 150 & 300 & 200 \\ 100 & 200 & 400 \end{vmatrix}$$

Exercice 2.2

Soient I_1, I_2 et I_3 les courants dans R_1, R_2 et R_3 (orientés positivement de la gauche vers la droite). Pour les trois mailles, on obtient :

maille 1 : $R_1.I_1 + R_4(I_1 - I_2) - E_1 = 0$

maille 2 : $- R_4(I_1 - I_2) + R_2.I_2 + R_5(I_2 - I_3) = 0$

maille 3 : $- R_5(I_2 - I_3) + R_3.I_3 - E_2 = 0$

Il faut résoudre le système :

$$\begin{bmatrix} 60 & -40 & 0 \\ 40 & -70 & 20 \\ 0 & -20 & 60 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1320}\begin{bmatrix} 38 & -24 & 8 \\ 24 & -36 & 12 \\ 8 & -12 & 26 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

On tire : $I_1 = 0,245$ A ; $I_2 = 0,218$ A ; $I_3 = 0,272$ A.

Exercice 2.3

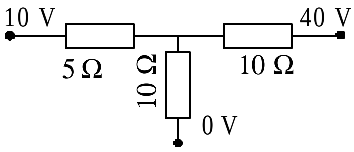
– *Méthode des mailles :*

Soient I_1 et I_2 les courants dans R_1 et R_2. Si I_1 est orienté positivement de la gauche vers la droite et si I_2 a le sens opposé, on a :

$-10 + 5.I_1 + 10.(I_1 + I_2) = 0$ (1)
$-40 + 10.I_2 + 10.(I_1 + I_2) = 0$ (2)
On multiplie (1) par – 2 et on ajoute à (2) ; on tire : $I_1 = -1$ A et $I_2 = 2,5$ A
$I = I_1 + I_2 = 1,5$ A et $U = R_3.I = 15$ V

– *Principe de superposition :*
a) On « éteint » E_2. E_1 débite dans R_1 en série avec $R_0 = (R_2 // R_3)$.
On tire $U_1 = E_1.R_1/(R_0 + R_1) = 10.5/(5 + 5) = 5$ V.
b) On « éteint » E_1. E_2 débite dans R_2 en série avec $R_0 = (R_1 // R_3)$.
On tire $U_2 = E_2.R_2/(R_0 + R_2) = 40.(10/3)/(10 + (10/3)) = 10$ V.
$U = U_1 + U_2 = 15$ V

– *Méthode de Millman :*



$$V_A = \frac{E_1/R_1 + E_2/R_2}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} = 15V$$

Exercice 2.4
Soient A et B les extrémités de R_C. Si on supprime R_C, la fem entre A et B est (diviseur de tension idéal) : $E_T = E.R_2/(R_1 + R_2) = 4$ V. La résistance entre A et B quand E est remplacé par un court-circuit est : $R_T = R_1.R_2/(R_1 + R_2) = 666\ \Omega$. Le circuit équivalent comporte en série E_T, R_T et R_C. Donc $I_C = E_T/(R_T + R_C)$.

Exercice 2.5
Circuit *a*
Il faut commencer par l'équivalent Norton dont la détermination est immédiate : $I_N = I_1 + I_2 = 3$ A.
La résistance de Norton est : $R_N = R_1 // R_2 = 6,66\ \Omega$.
On en déduit le générateur de Thévenin : $R_T = R_N$ et $E_T = I_N.R_N = 20$ V.

Circuit *b*
On a des circuits en // : il faut remplacer le générateur de tension par un générateur de courant pour se ramener au circuit *a* avec $R_1 = 10\ \Omega$ et $I_1 = E/R_1 = 0,4$ A.
$I_N = I_1 + I_2 = 1,4$ A.
La résistance de Norton est : $R_N = R_1 // R_2 = 5\ \Omega$.
Pour le générateur de Thévenin on obtient : $R_T = R_N$ et $E_T = I_N.R_N = 7$ V.

Circuit *c*
On a des circuits en série : il faut remplacer le générateur de courant par un générateur de tension. On a : $E_2 = I_1.R_2 = 10$ V et $R_2 = 10\ \Omega$.
$E_T = E_1 + E_2 + E_3 = -4 + 10 + 2 = 8$ V.
Pour déterminer la résistance équivalente, on remplace les générateurs de tension par un court-circuit : $R_T = R_1 + R_2 = 20\ \Omega$. Enfin $I_N = 8/20 = 0,4$ A.
Exercice 2.6
– *Thévenin* : On remplace R_2, R_3 et E_2 par le générateur équivalent.
$E_T = E_2.R_3/(R_2 + R_3) = 20$ V et $R_T = R_2.R_3/(R_2 + R_3) = 5\ \Omega$.
Le courant dans la maille série obtenue est tel que : $-E_T + (R_T + R_1).I + E_1 = 0$.
Donc I = 1 A et $V_{AM} = V_{CM} + V_{AC} = 20 - 5 = 15$ V.
– *Norton* : On remplace chaque générateur de tension par un générateur de courant équivalent : $I_1 = E_1/R_1 = 2$ A ; $I_2 = E_2/R_2 = 4$ A ; $I_N = I_1 + I_2 = 6$ A.
$R_N = R_1 // R_2 // R_3 = 10/4\ \Omega$. Donc $V_{AM} = R_N.I_N = 15$ V.

Exercice 2.7

On remplace E, R_1 et R_2 par un générateur de Thévenin équivalent :

$E_T = E.R_1/(R_2 + R_1) = 10$ V ; $R_T = (R_2 // R_1) = 1$ kΩ.

Dans le circuit série obtenu, l'équation de la droite de charge est U = 10 – 1000.I

Elle coupe les axes en U = 10 V et I = 10 mA. Pour le point de fonctionnement, on tire : U = 5 V et I = 5 mA.

Exercice 2.8

On recherche l'équivalent Thévenin entre A et B. On débranche R_C , alors :

$V_{AM} = E.R_2/(R_2 + R_1) = 3$ V ; $V_{BM} = E.R_4/(R_3 + R_4) = 2$ V.

$E_T = V_{AB} = 3 – 2 = 1$ V.

Pour la résistance équivalente, il faut noter que remplacer le générateur par un court-circuit revient à réunir les points D et M: entre A et B, la résistance est donc égale à $(R_2 // R_1)$ en série avec $(R_3 // R_4)$ soit $R_T = 2{,}166$ kΩ.

Le courant dans R_C est : $I_C = E_T /(R_T + R_C)$.

Exercice 2.9

Si on déconnecte le point 1, il doit y avoir égalité des impédances entre 2 et 3.

$Z_{23} = R_2 + R_3 = R_{23} // (R_{12} + R_{13})$. On tire les trois égalités suivantes :

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{12}R_{23} + R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \;;\; R_2 + R_1 = \frac{R_{12}R_{23} + R_{13}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \;;\; R_1 + R_3 = \frac{R_{12}R_{13} + R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

En sommant les 2 premières égalités et en retranchant la 3[e], on déduit :

$$R_1 = \frac{R_{12}.R_{13}}{R_{12} + R_{12} + R_{23}} \quad R_2 = \frac{R_{12}.R_{23}}{R_{12} + R_{12} + R_{23}} \quad R_3 = \frac{R_{23}.R_{13}}{R_{12} + R_{12} + R_{23}}$$

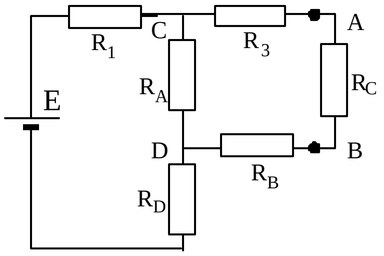
Pour la transformation inverse, on pose :

$$S = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 = \frac{R_{12}R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad \text{Mais comme : } \frac{S}{R_1} = R_{23}$$

on déduit : $R_{23} = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}$ ...

Exercice 2.10

a) On remplace le triangle R_2, R_4, R_5 par une étoile R_A, R_B, R_D. On applique ensuite Thévenin en notant que $V_{AB} = V_{CD}$ car il ne circule alors aucun courant dans les résistances R_3 et R_B puisque R_C est déconnecté quand on détermine E_T.



R_A, R_B, R_D seront calculées avec les formules établies dans l'exercice 2.9.

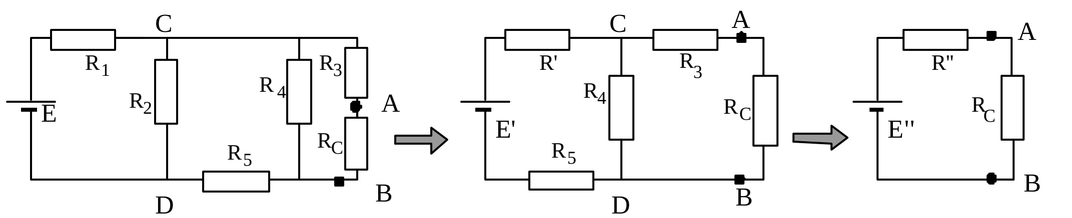
On calcule ensuite :

$E_T = E.R_A /(R_1 + R_A + R_D)$

puis

$R_T = R_3 + (R_A // (R_1 + R_D)) + R_B$

b) Il est plus simple d'appliquer deux fois de suite le théorème de Thévenin :

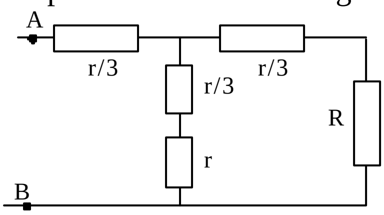


On a par exemple R" = $R_3 + (R_4 //(R' + R_5))$

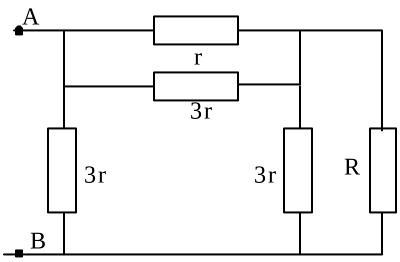
Exercice 2.11
On remplace la partie gauche (E, R_3 et R_2) par son équivalent Thévenin :
$E_T = E.R_2/(R_3 + R_2) = 6$ V et $R_T = R_2.R_3/(R_2 + R_3) = 2$ kΩ.
Mais $R_T + R_1 = R_3$: on est ramené au cas précédent avec un générateur dont la fem est divisée par trois. On itére l'opération pour les n cellules. On obtient un circuit série comportant un générateur de fem $E/(3^n)$, $R_T = 2$ kΩ, R_1 et R_C.

Exercice 2.12
$$V_A = \frac{k_1E/2R + V_B/R}{1/2R + 1/2R + 1/R} = \frac{k_1E + 2V_B}{4}$$
$$V_B = \frac{V_A/R + k_2E/2R + V_C/R}{1/2R + 1/R + 1/R} = \frac{2V_A + k_2E + 2V_C}{5} \; ; \; V_B = \frac{k_1E}{8} + \frac{k_2E}{4} + \frac{V_C}{2}$$
$$V_C = \frac{V_B/R + k_3E/2R + V_D/R}{1/2R + 1/R + 1/R} \; ; \; V_C = \frac{k_1E}{16} + \frac{k_2E}{8} + \frac{k_3E}{4} + \frac{V_D}{2}$$
$$V_D = \frac{k_3E + 2V_C}{3} \; ; \; V_D = \frac{k_1E}{16} + \frac{k_2E}{8} + \frac{k_3E}{4} + \frac{k_4E}{2} = \frac{E}{16}\left(k_1.2^0 + k_2.2^1 + k_3.2^2 + k_4.2^3\right)$$
Ce circuit est appelé convertisseur R-2R. Il permet de transformer une information codée en binaire en une tension analogique.

Exercice 2.13
On peut transformer le triangle en étoile (cf exercice 2.9).

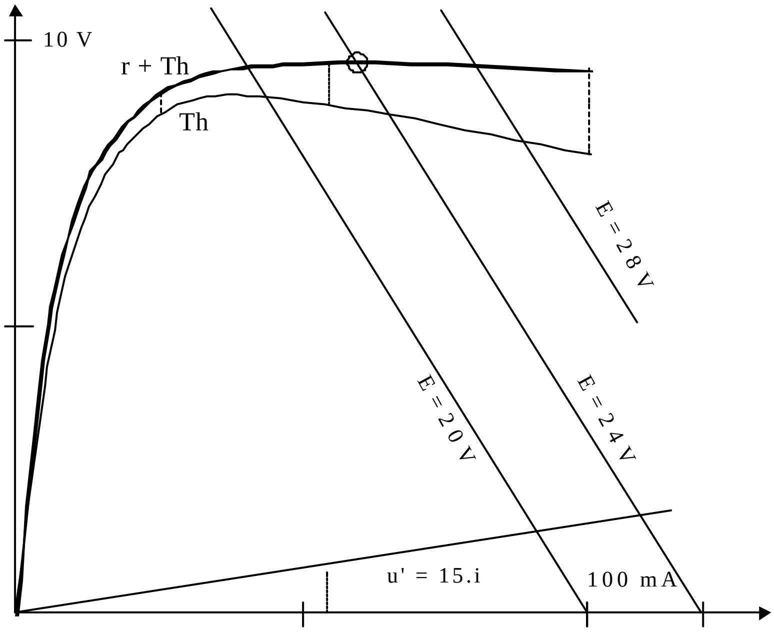


Chaque résistance de l'étoile vaut :
r.r/(r + r + r) = r/3.
On cherche la résistance entre A et B :
R = r/3 +(4r/3 // (r/3 + R)).
$$R = \frac{r}{3} + \frac{12Rr + 4r^2}{3r + 9R + 12r}$$
$9R^2 + 15Rr = 5r^2 + 3Rr + 12Rr + 4r^2 \;\Rightarrow\; r = R$
On peut aussi transformer l'étoile en triangle :



Chaque résistance du triangle vaut :
$3r^2/r = 3r$.
On désire que la résistance entre A et B soit égale à R :
R = 3r // ((3r // r) + (3r // R)).
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{3r} + \frac{4R + 12r}{9r^2 + 15Rr}$$
On retrouve évidemment r = R.

Exercice 2.14
On trace la caractéristique équivalente à r en série avec la thermistance Th.
On remplace E, R et R_C par le générateur de Thévenin équivalent pour obtenir un circuit série composé de E_T, R_T et (r + Th).
$E_T = E.R_C/(R + R_C)$ et $R_T = R.R_C/(R + R_C)$.
On obtient donc : $u = \dfrac{E.R_C}{R + R_C} - \dfrac{R.R_C}{R + R_C} i$ qui est l'équation de la droite de charge.
Si i = 60 mA, on lit sur le graphe u = 9,6 V. On tire R ≈ 200 Ω. (u = 0,8E – 16.i)
Si E varie de ± 15%, on a : 20 ≤ E ≤ 28 V. Quand E varie, la droite de charge se déplace en restant parallèle à elle-même dans le plan u, i.



Dans la zone des points de fonctionnement, la caractéristique est pratiquement horizontale donc la tension reste constante aux bornes de R_C.

Enoncés

Retour au menu