Enoncés　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Cours

Exercice 3.1

Quand le tube est éteint, le courant est nul : le condensateur se charge uniquement à travers R : $-E + R.i + v = 0$ et $i = dQ/dt = C.dv/dt$. On pose $\tau_1 = R.C$

$$RC\frac{dv}{dt} + v = E \quad \Rightarrow \quad v = Ae^{-\frac{t}{\tau 1}} + E$$

On prend comme temps origine le moment où la lampe s'éteint : $v = V_{Ex}$

$v(t) = E - (E - V_{Ex}).e^{-t/\tau 1}$. La charge cesse quand $v = V_{Al}$; sa durée vaut :

$$T_1 = \tau_1 \mathrm{Log}\frac{E - V_{Ex}}{E - V_{Al}}$$

Lors de la décharge du condensateur dans la lampe conductrice, on a $r << R$.

Donc : $v = -r.C.dv/dt$ et $v(t) = B.e^{-t/\tau 2}$. La décharge débute quand $v = V_{Al}$ et donc $B = V_{Al}$. La lampe s'éteint quand $v = V_{Ex}$ au bout du temps $T_2 = \tau_2 \mathrm{Log}(V_{Al}/V_{Ex})$

AN : $T_1 = 3{,}36$ s et $T_2 = 0{,}167$ s.

Exercice 3.2

Circuit a.

On a en permanence $Q + Q' = Q_0$ et $-V + R.i + V' = 0$. Comme $i = -dQ/dt$, on a :

$-Q/C + Q'/C' - RdQ/dt = 0$

$$\frac{Q_0}{C'} = Q\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right) + R\frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} + Q\frac{C + C'}{RCC'} = \frac{CQ_0}{RCC'}$$

Une solution particulière est : $Q = Q_0.C/(C + C')$ et la solution générale sans 2[e] membre est : $Q = A.e^{-t/\tau}$ avec $\tau = RCC'/(C + C')$. En $t = 0$, $Q = Q_0$

$$Q = \frac{Q_0 C}{C + C'}\left(1 + \frac{C}{C'}e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \quad Q' = Q_0 - Qi = \frac{Q_0}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Circuit b.

Quand on ferme le circuit, la charge se répartit entre les deux condensateurs :

$Q + Q' = Q_0$; $U = Q/C = Q'/C'$ et donc $Q' = Q.C'/C$. Juste à la fermeture ($t = 0$) on a donc : $Q(0) = Q_0C/(C + C')$ et $Q'(0) = Q_0C'/(C + C')$; ensuite les deux condensateurs se déchargent dans R.

On pose $I = U/R$, $i = -dQ/dt = -C.dU/dt$ et $i' = -dQ'/dt$. $I = i + i'$

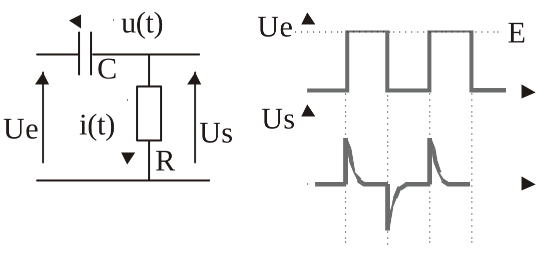
$$\frac{U}{R} = -(C + C')\frac{dU}{dt} \quad \Rightarrow \quad U = A.e^{-t/\tau}; \quad \tau = R(C + C')$$

De $Q(t) = C.U(t)$ et de $i = -dQ/dt$, on tire :

$$i = \frac{Q_0 C}{R(C + C')^2}e^{-t/\tau} \ ; i' = \frac{Q_0 C'}{R(C + C')^2}e^{-t/\tau} \ ; I = \frac{Q_0}{R(C + C')}e^{-t/\tau}$$

Exercice 3.3

Soient u(t) la tension aux bornes du condensateur et i(t) le courant dans la résistance. On considère que l'impédance de la charge est infinie.



$-U_E + u + R.i = 0$

$I = dQ/dt = C.du/dt$

$u + R.C.du/dt = U_E$

On pose $RC = \tau$. La solution est :

$u = U_E + A.\exp(-t/\tau)$

$$U_S = R.I = R.C.A[-1/RC.\exp(-t/\tau)] \Rightarrow U_S(t) = -A.\exp(-t/\tau)$$

Pour obtenir la solution générale, on utilise la condition initiale : $u(0) = U_E + A$

- ♦ La tension d'entrée U_E passe de 0 à E.
  $u(0) = 0 = E + A$; donc : $A = -E$ et $U_S(t) = E.\exp(-t/\tau)$
  Après la transition, la tension de sortie décroît de E à 0 avec une constante de temps $\tau = R.C$
- ♦ La tension d'entrée U_E passe de E à 0
  $u(0) = E = A$; donc $A = E$ et $U_S(t) = -E.\exp(-t/\tau)$
  Après la transition, la tension de sortie croît de $-E$ à 0 avec une constante de temps $\tau = R.C$.

Pour que le signal de sortie U_S soit la dérivée du signal d'entrée, il faudrait que ce soit une impulsion de largeur nulle (pic de Dirac). On s'approche de cette condition en choisissant R et C pour que le produit R.C soit très inférieur à la période du signal rectangulaire d'entrée. Le montage donne des impulsions positives sur les fronts montants du signal d'entrée et négatives pour les fronts descendants.

Exercice 3.4

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{On pose :} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \lambda = \frac{R}{2L}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

Cette équation caractéristique admet comme racines :

$$r = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm j\omega \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

$$Q = e^{-\lambda t}\left(Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}\right)$$

Les conditions initiales sont : $Q(0) = Q_0$ et $i(0) = dQ/dt_{(t=0)} = 0$; $(A + B) = Q_0$

$A(j\omega - \lambda) - B(j\omega + \lambda) = 0$. Donc :

$$Q = \frac{Q_0 e^{-\lambda t}}{2j\omega}((\lambda + j\omega)e^{j\omega t} - (\lambda - j\omega)e^{-j\omega t}) \; ; \; Q = Q_0 e^{-\lambda t}\left(\lambda\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j\omega}\right) + \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right)$$

$$Q = Q_0 e^{-\lambda t}\left(\cos\omega t + \frac{\lambda}{\omega}\sin\omega t\right) \quad \text{On pose : } \operatorname{tg}\Phi = \frac{\lambda}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \cos\Phi = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$Q = \frac{Q_0 e^{-\lambda t}}{\cos\Phi}(\cos\omega t\cos\Phi + \sin\omega t\sin\Phi) \; ; \quad Q = Q_0\frac{\omega_0}{\omega}e^{-\lambda t}\cos(\omega t - \Phi)$$

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0\omega_0 e^{-\lambda t}}{\omega}(-\lambda\cos(\omega t - \Phi) - \omega\sin(\omega t - \Phi)) \; ; \quad i = -Q_0\frac{\omega_0^2}{\omega}e^{-\lambda t}\sin(\omega t)$$

La résistance critique est $R_C = 2\sqrt{L/C}$; comme $\omega_0^2 = 1/LC$, on tire :

$L = R_C/\omega_0^2$ et $C = 2/\omega_0^2 R_C$

AN : L = 0,05 H et C = 5 µF.

Exercice 3.5

En écrivant que la somme des courants est nulle (avec une charge infinie), on tire :

$$\frac{e-s}{R_1}+C_1\frac{d(e-s)}{dt}=\frac{s}{R_2}+C_2\frac{ds}{dt} \quad ; \quad (C_1+C_2)\frac{ds}{dt}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)s=\frac{e}{R_1}+C_1\frac{de}{dt}$$

Après changement de variable, il vient :

$$(C_1+C_2)\frac{dx}{dt}+(C_1+C_2)\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{de}{dt}+\frac{R_1+R_2}{R_1.R_2}x+\frac{e}{R_1}=C_1\frac{de}{dt}+\frac{e}{R_1}$$

$$(C_1+C_2)\frac{dx}{dt}+\frac{R_1+R_2}{R_1.R_2}x=\frac{C_1R_1-C_2R_2}{R_1+R_2}\frac{de}{dt}$$

Si la condition de l'énoncé est satisfaite, il n'y a pas de second membre.
$x(t) = x(0).e^{-t/\tau}$ avec : $\tau = R_1R_2(C_1 + C_2)/(R_1 + R_2)$.

Donc : $s(t) = x(t) + e(t).R_2/(R_1 + R_2)$

En régime permanent : $s(t) = e(t).R_2 /(R_1 + R_2)$

Ce circuit qui permet d'éliminer l'influence de la capacité C_2 est utilisé comme sonde pour les oscilloscopes.

3.6 Régime apériodique

$$i=-q_0\frac{\omega_0^2}{2\Omega}e^{-\lambda t}(e^{\Omega t}-e^{-\Omega t})=K(e^{-(\lambda-\Omega)t}-e^{-(\lambda+\Omega)t})$$

$$\frac{di}{dt}=K(-(\lambda-\Omega).e^{-(\lambda-\Omega)t}+(\lambda+\Omega).e^{-(\lambda+\Omega)t})$$

T_0 correspond à $di/dt = 0$ soit : $(\lambda-\Omega).e^{-(\lambda-\Omega)To}=(\lambda+\Omega).e^{-(\lambda+\Omega)To}$

Donc : $e^{2\Omega To}=\dfrac{\lambda+\Omega}{\lambda-\Omega} \quad\Rightarrow\quad T_0=\dfrac{1}{2\Omega}\ln\left(\dfrac{\lambda+\Omega}{\lambda-\Omega}\right)$

Enoncés

Retour au menu