Enoncés

Cours

Exercice 4.1

On a : $Z = r + j\ell\omega$ (série) et $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jL\omega} = \dfrac{1}{r + j\ell\omega} = \dfrac{r - j\ell\omega}{r^2 + \ell^2\omega^2}$ (parallèle)

En séparant parties réelles et imaginaires, on tire :

$$\frac{1}{R} = \frac{r}{r^2 + \ell^2\omega^2} \quad \Rightarrow \quad R = r + r\frac{\ell^2\omega^2}{r^2} = r(1 + Q^2) \text{ avec } Q = \ell\omega/r$$

$$\frac{1}{L\omega} = \frac{\ell\omega}{r^2 + \ell^2\omega^2} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{r^2 + \ell^2\omega^2}{\ell\omega^2} = \ell(1 + \frac{1}{Q^2})$$

AN : $Q = 20$; $R \approx 4$ kΩ ; $L \approx \ell = 0{,}2$ H

Relations inverses : on pose $Q = L\omega/R$

$$r + j\ell\omega = \frac{jL\omega R}{R + jL\omega} \quad \Rightarrow \quad r = R\frac{Q^2}{1 + Q^2} \quad ; \quad \ell = L\frac{1}{1 + Q^2}$$

Exercice 4.2

On a : $Z = r + \dfrac{1}{jC'\omega} = \dfrac{R}{1 + jRC\omega} = \dfrac{R - jR^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}$. On pose $Q = 1/RC\omega$

$$r = \frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2} = R\frac{Q^2}{1 + Q^2} \quad ; \quad C' = \frac{1 + R^2C^2\omega^2}{R^2C^2\omega^2} = C(1 + Q^2)$$

Pour les relations réciproques, il est plus simple d'utiliser les admittances.

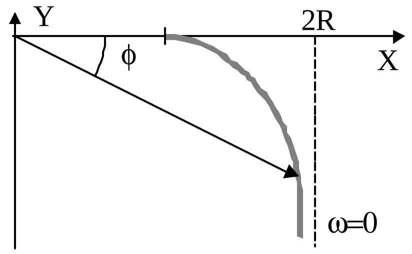
$$Y = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{jC'\omega}{1 + jrC'\omega} = \frac{jC'\omega(1 - jrC'\omega)}{1 + r^2C'^2\omega^2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2C'^2\omega^2}{1 + r^2C'^2\omega^2} \quad \Rightarrow \quad R = r(1 + 1/Q^2) \quad ; \quad C = \frac{C'}{1 + r^2C'^2\omega^2} = C'\frac{Q^2}{1 + Q^2}$$

Exercice 4.3

$Z = Z_1 + Z_2$ avec : $Z_1 = R + 1/jC\omega$ et $1/Z2 = 1/R + jC\omega$

$$Z = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jRC\omega} = R\left(1 + \frac{1}{1 + R^2C^2\omega^2}\right) - j\left(\frac{1 + 2R^2C^2\omega^2}{C\omega(1 + R^2C^2\omega^2)}\right)$$



Pour une fréquence nulle, la partie réelle vaut 2R. Elle tend vers R pour $\omega \Rightarrow \infty$

Dans le plan complexe, le graphe a l'allure ci-contre.

Exercice 4.4

La condition d'équilibre du pont est : $R_1R_2 = Z_1Z_2$

$$Z_1 = r + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jrC\omega}{jC\omega} \quad ; \quad \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$$

$$R_1R_2 = \frac{1 + jrC\omega}{jC\omega}\frac{jLR\omega}{R + jL\omega} = \frac{LR + jLRCr\omega}{CR + jLC\omega}$$

$R_1R_2CR + jLCR_1R_2\omega = LR + jLRCr\omega$. En séparant parties réelles et imaginaires, on tire : $L = R_1R_2C = 50$ mH et $R = R_1R_2/r = 50$ kΩ

Exercice 4.5

La condition d'équilibre est : $R_1R_2 = Z_1Z_2$

$$Z_1 = \rho + jL\omega \quad ; \quad \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{r} + jC\omega \quad \Rightarrow \quad Z_2 = \frac{r}{1 + jrC\omega} \quad ; \quad R_1R_2 = \frac{r\rho + jLr\omega}{1 + jrC\omega}$$

$\rho = R_1R_2/r = 10\ \Omega \qquad L = R_1R_2C = 1$ H

Exercice 4.6

Circuit a :

$Z = \dfrac{1}{jC_0\omega} + \dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} = j.\left(\dfrac{L\omega}{1 - LC\omega^2} - \dfrac{1}{C_0\omega}\right)$. Si cette impédance est nulle, on a :

$1 - LC\omega^2 = LC_0\omega^2$. On peut ainsi définir : $\omega_R^2 = \dfrac{1}{L(C + C_0)}$

L'admittance s'écrit : $Y = j.\left(\dfrac{C_0\omega(1 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2 - LC_0\omega^2}\right)$. Elle est nulle pour : $\omega_A^2 = \dfrac{1}{LC}$

Circuit b :

Branche du haut : $Z_H = \dfrac{1}{j\omega C'_0} + jL'\omega = \dfrac{1 - L'C'_0\,\omega^2}{j\omega C'_0}$; branche du bas : $Z_B = \dfrac{1}{jC'\omega}$

$Z_{AB} = \dfrac{1 - L'C'_0\,\omega^2}{j\omega C'_0 + j\omega C'(1 - L'C'_0\,\omega^2)}$. Si cette impédance est nulle, on a : $\omega_R^2 = \dfrac{1}{L'C'_0}$

L'admittance s'écrit : $Y = j\omega.\left(C' + \dfrac{C'_0}{1 - L'C'_0\,\omega^2}\right)$. Elle est nulle si :

$$C' - L'C'C'_0\,\omega^2 + C'_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_A^2 = \frac{1}{L'}\left(\frac{1}{C'} + \frac{1}{C}\right)$$

Équivalence des circuits :

On peut écrire l'égalité des admittances. On tire :

$$C_0 - LCC_0\omega^2 - L'C'_0\,C_0\omega^2 + L'C'_0\,LCC_0\omega^4 =$$
$$C' + C'_0 - (C' + C'_0)(C + C_0)L\omega^2 - L'C'C'_0\,\omega^2 + L'C'C'_0\,L(C + C_0)\omega^4$$

L'égalité ne dépend pas de la valeur de ω. Les coefficients des puissances de ω doivent être identiques. Des termes de degré 0, on tire : $C_0 = C' + C'_0$

Des termes de degré 4, on tire : $C.C_0 = C'(C + C_0)$.

$$C' = \frac{CC_0}{C + C_0} \quad ; \quad C'_0 = C_0 - \frac{CC_0}{C + C_0} \quad \Rightarrow \quad C'_0 = \frac{C_0^2}{C + C_0}$$

Avec l'égalité des ω_R, on tire : $L(C + C_0) = L'C'_0$ soit : $L' = L\dfrac{(C + C_0)^2}{C_0^2}$

Exercice 4.7

Solution avec les imaginaires :

$V_{AB} = 2Ee^{j\omega t} = Ri + 1/jC\omega \Rightarrow i = 2jEC\omega/(1 + jRC\omega)$

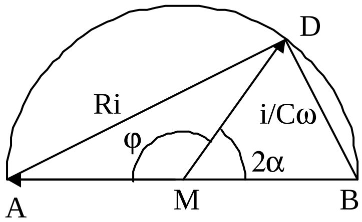
$V_{DM} = V = V_{DA} + V_{AM} = E - Ri$

$$V = E\left(1 - \frac{2\,jRC\omega}{1 + jRC\omega}\right) = E\left(\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \text{ ; Donc } |Z| = 1$$

$$Z = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{a - jb}{a + jb} = \frac{Ae^{-j\varphi}}{Ae^{+j\varphi}} = e^{-j\psi} \text{ ; } \psi = 2\varphi$$

$A\cos\varphi - jA\sin\varphi = 1 - jRC\omega \Rightarrow tg\varphi = RC\omega \Rightarrow \psi = 2ArcTg(RC\omega)$

Solution avec la construction de Fresnel :



La tension aux bornes du condensateur est en avance de $\pi/2$ sur le courant. Le lieu géométrique du point D est un cercle de diamètre AB et de centre M. La tension entre les points M et D a pour amplitude E mais elle est déphasée de l'angle 2α.

L'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD})$ vaut α et $tg\alpha = 1/RC\omega$

Exercice 4.8

$$Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R\left(1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)\right)$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{L\omega}{R} = \frac{Q\omega}{\omega_0} = Qx$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C} = L\omega_0^2 \quad \frac{1}{RC} = Q\omega_0^2 \quad \frac{1}{RC\omega} = \frac{Q}{x}$$

$$Z = R\left[1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = Z_0\cos\varphi + jZ_0\sin\varphi$$

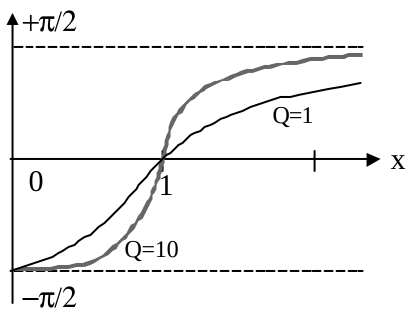
$$tg\varphi = Q\left(x - \frac{1}{x}\right) \quad ; \quad Z_0 = R\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \text{ ; } I = U/Z_0$$

Pour $x = 1$, I présente un maximum $I_M = U/R$. Il y a alors résonance en courant. Si toutes choses égales par ailleurs, on diminue R, on augmente la valeur du facteur de qualité Q ainsi que l'acuité de la résonance en courant.

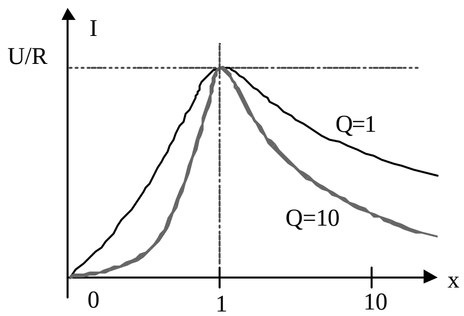
$U_C = Z_C.I = I/C\omega = I.RQ/x$.

$U_L = Z_L.I = IL\omega = I.RQx$.

$$U_L = \frac{QxU}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad ; \quad U_C = \frac{QU}{x.\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$



Courbe de phase



Courbe du courant

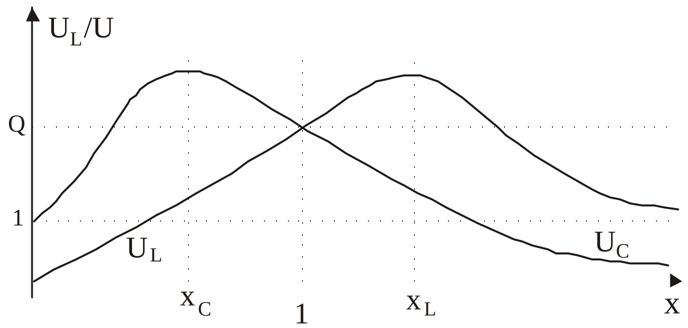
Pour chercher le maximum de U_L, on calcule sa dérivée :

$$\frac{dU_L}{dx} = \frac{Q\sqrt{1+Q^2(x-1/x)^2} - \dfrac{Q^3x(2x-2/x^3)}{2\sqrt{1+Q^2(x-1/x)^2}}}{1+Q^2(x-1/x)^2}$$

Le numérateur s'annule si : $1 - 2Q^2 + 2Q^2/x^2 = 0$ soit pour : $x^2 = \dfrac{2Q^2}{2Q^2-1}$

Il faut que $2Q^2 - 1 > 0$ soit $Q > 1/\sqrt{2}$. On a alors : $x_L = \dfrac{Q\sqrt{2}}{\sqrt{2Q^2-1}} > 1$

Un calcul identique pour U_C donne un maximum pour $x_C = 1/x_L$.
Il y a trois fréquences réduites caractéristiques x_C, 1 et x_L qui se confondent quand Q est grand. x_C et x_L correspondent à des surtensions aux bornes du condensateur et de l'inductance : ce sont les résonances en tension.
Pour $\omega = \omega_0$, il y a résonance en courant dans le circuit.



Courbes U_L /U et U_C /U en fonction de x.

Enoncés

Retour au menu