Retour à l'applet

Le paquet d'onde gaussien

Soit un paquet d'onde dont la transformée de Fourier est la gaussienne :

$$\Psi(k) = \frac{1}{\Delta k.\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\Delta k^2}}$$

dont le maximum est centré sur $k = k_0$ et dont la mi-largeur est Δk.

L'équation de propagation des ondes sinusoïdales est donc :

$$y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(k) \cos(kx - \omega(k)t) dk$$

Pour intégrer numériquement cette relation, il est préférable de travailler en coordonnées réduites en posant :

$$K = k/k_0,\ L = k_0/\Delta k,\ X = k_0.x \text{ et } T = t.d\omega/dK \text{ et } Vg = \frac{1}{k_0}\left[\frac{d\omega(K)}{dK}\right]_{K=1}$$

Le paquet est alors centré sur $|K| = 1$.

L'équation de propagation des ondes devient :

$$y(X,T) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{L^2(K-1)^2}{2}} \cos\left(KX - \frac{\omega(K)}{k_0.Vg} T\right) dK$$

Si $\omega(K)$ n'est pas constant, le milieu est dispersif.

Pour faire l'intégration numérique, il faut noter que la fonction $\Psi(k)$ décroît très vite avec k et que l'on peut se limiter à faire varier K entre(– 1 – n/L) et (+1 + n/L) avec n supérieur à 5.

La fonction est intégrée numériquement par la méthode de Simpson pour X et T donnés. Dans le domaine d'intégration choisi la courbe varie rapidement, le pas doit être assez petit. La courbe représentative du paquet d'ondes est tracée en faisant varier X entre –60 + T et 60 + T.

La propagation est montrée en faisant varier T.

Dans l'applet, on peut choisir comme valeur de la pulsation $\omega(k)$ les valeurs Ak, Ak² ou A√k.

Dans les deux derniers cas, il y a dispersion. Celle-ci se traduit par un élargissement du paquet d'onde au cours de son déplacement et par une vitesse de groupe différente de la vitesse de phase.

Retour à l'applet