Retour à l'applet

Oscillateur harmonique excité

Régime libre

Comme modèle de l'oscillateur harmonique, on considère une masse m suspendue à un ressort de raideur k et dont la longueur au repos est l_0.
A l'équilibre, la longueur du ressort est l_1 et on a : **$mg = k(l_1 - l_0)$**
Si on déplace la masse d'une hauteur x, la force de rappel devient : $-k(l_1 + x - l_0)$

Le principe fondamental de la dynamique donne : $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$.

Cette équation est celle de l'**oscillateur harmonique** que l'on retrouve dans de nombreux domaines de la physique.

Le mouvement est sinusoïdal de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (la période est $T = 2\pi / \omega_0$).

Si l'on considère que le pendule est également soumis à un frottement visqueux de coefficient h, l'expression de l'accélération devient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}.x - \frac{h}{m}.\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda.\frac{dx}{dt} + \omega_0^2.x = 0$$

$\lambda = h/2m$ est le coefficient d'amortissement.

Les solutions analytiques du problème sont connues :

- Pour les amortissements faibles, la solution est de la forme : $x = A.e^{-\lambda t}.\cos(\Omega.t + \varphi)$

  $\Omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ est la pseudo-pulsation. (A et φ dépendent des conditions initiales)
- Pour l'amortissement critique ($\lambda = \omega_0$) la solution est : $x = (At + B).e^{-\lambda t}$
- Pour les amortissements forts, la solution est de la forme : $x = A.e^{\alpha t} + B.e^{\beta t}$

Régime forcé

On suppose que le point de suspension est animé d'un mouvement sinusoïdal. On peut alors écrire que :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda.\frac{dx}{dt} + \omega_0^2.x = F_0.\cos(\omega t + \phi)$$

La solution générale de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre ($x_1(t)$ du **régime libre**) et d'une solution particulière $x_2(t)$ de l'équation avec second membre. La nature de l'équation fait que la solution particulière est du même type que celle de l'excitation.
A bout d'un certain temps (durée du **régime transitoire**), fonction des paramètres du système, la solution $x_1(t)$ s'annule et on n'observe plus que le **régime forcé** $x_2(t)$. Les caractéristiques du système oscillant n'interviennent plus.
Des phénomènes complexes ont lieu quand la fréquence de l'excitation est proche de la fréquence propre du système : on peut alors observer des **résonances** et des **battements**.

Simulation numérique

Bien que les solutions analytiques du problème soient connues, la résolution numérique du problème est très intéressante car elle permet de voir instantanément l'influence de la variation des paramètres sur les solutions du problème.
De plus la simulation permet de visualiser les phénomènes transitoires. On observe en particulier des régimes très complexes quand le rapport des fréquences de l'excitateur et du système est rationnel.

Les conditions initiales sont imposées : vitesse initiale nulle et amplitude initiale égale à 0,8 cm. On peut faire varier l'amortissement et tous les paramètres de l'excitation.

A partir de la résolution numérique de l'équation générale, on trace la courbe de variation de l'amplitude en fonction du temps. Il est aussi possible de tracer dans l'espace des phases la courbe donnant la variation de l'amplitude en fonction de la vitesse.

Retour à l'applet