Retour à l'applet

Propagation de la chaleur

Etude analytique

L'équation de propagation de la chaleur en fonction du temps (équation de Fourier) dans un milieu isotrope à une dimension est :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial t}}$$

avec la diffusivité thermique a² = ρc/K. (c capacité calorifique, ρ masse volumique, K conductivité thermique du matériau). C'est.
Il existe une méthode analytique (pour laquelle Fourier a développé les séries qui portent son nom) de résolution de cette équation aux dérivées partielles.
Pour la résolution numérique de cette équation, on utilise la méthode de Gauss-Siedel.
On découpe la barre du matériau (longueur L) en N tranches identiques d'épaisseur L/N.
Soit T(i) = T(x) la température de la i$^{\text{ième}}$ tranche. La température de la tranche i + 1 est donc égale à T(i + .1) = T(x + L/N).

On fait un développement limité au second ordre : $T(i+1) = T(x) + \frac{L}{N}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{L^2}{2N^2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

De même, $T(i-1) = T(x) - \frac{L}{N}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{L^2}{2N^2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Donc : $T(i+1) + T(i-1) - 2T(i) = \frac{L^2}{N^2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

La température de la tranche i à l'instant t + dt est donc égale à :

$$\boxed{T(i)_{t+dt} = T(i)_t + dt.\frac{N^2}{L^2 a^2}\left[T(i+1)_t + T(i-1)_t - 2T(i)_t\right]}$$

On remplit au début du calcul le tableau T(i) en fonction des conditions initiales et au cours du calcul, on maintient les conditions aux limites.
Cette méthode donne des résultats corrects si le nombre de tranches est assez important et si le pas d'intégration *dt* est assez petit.

Cas étudiés

Dans le premier cas (**barre**) on étudie la propagation de la chaleur dans une barre dont la température initiale est T0 et dont les températures des extrémités sont imposées (T1 et T2).
Pour introduire les ***conditions aux limites***, il faut imposer T(0) = T1 et T(N) = T2.
Pour tenir compte des ***conditions initiales***, il faut remplir le tableau avec la valeur T0.

Dans le second cas (**blocs**) on étudie la propagation de la chaleur dans deux barres (d'un même matériau) dont les températures initiales sont T1 et T2. Ces deux barres sont mises en contact à l'instant t = 0. On étudie ensuite l'évolution de la température en supposant le système isolé.
Pour tenir compte des ***conditions initiales***, il faut remplir la partie du tableau qui correspond à la première barre avec la valeur T1 et la partie correspondant à la seconde avec T2.
Pour introduire les ***conditions aux limites***, il faut imposer T(0) = T(1) et T(N) = T(N-1). En effet comme le système est isolé, le flux de chaleur aux extrémités est nul.

Retour à l'applet