Chute libre

On lance une masse m avec une vitesse initiale v_0 faisant l'angle θ avec l'horizontale .

Sans frottement

Si on projette l'équation fondamentale de la dynamique sur la verticale et l'horizontale, on a :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -m.g$$

La double intégration de ces équations conduit, compte tenu des conditions initiales à :

$$x = v_0.\cos\theta.t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.\sin\theta.t$$

La trajectoire du mobile est une parabole.

Avec frottements

On suppose que la masse est soumise à une force de frottement proportionnelle à la vitesse. Cette hypothèse est valable pour des vitesses inférieures à 60 km/h. Pour des vitesses supérieures, il est préférable de considérer que le frottement est fonction du carré de la vitesse. Si on projette l'équation fondamentale de la dynamique sur la verticale et l'horizontale, on a :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k.v_x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k.v_y - mg$$

La première équation peut s'écrire sous la forme : $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}v_x \Rightarrow v_x = Ce^{-\frac{k}{m}t}$.

Les conditions initiales impliquent que : $v_x = v_0 \cos\theta.e^{-\frac{k}{m}t}$

La second équation peut s'écrire sous la forme : $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{k}{m}v_y - g \Rightarrow \frac{k}{m}v_y + g = Ce^{-\frac{k}{m}t}$.

Les conditions initiales impliquent que : $v_y = \left(\frac{m}{k}g + v_0 \sin\theta\right).e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k}g$

Une nouvelle intégration conduit à :

$$x = \frac{m}{k}v_0 \cos\theta\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$y = \frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}g + v_0 \sin\theta\right).\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{m}{k}gt$$

Pour les petites valeurs de k/m, il est possible de faire un développement limité de ces relations. On retrouve alors les expressions du cas sans frottement.

On constate que pour t assez grand v_x tend vers 0, et v_y vers –mg/k. Le mobile atteint une **vitesse limite et la chute est verticale** selon la valeur asymptotique $x = \frac{m}{k}v_0 \cos\theta$