Enoncés ⇧ Cours ⇧

Exercice 5.1

On cherche l'équivalent Thévenin du circuit entre A et B :

$e = E.R/(R + Z_C)$ et $\rho = Z_C + (R // Z_C) = Z_C.(2R + Z_C)/(R + Z_C)$

La tension de sortie est donc : $s = e.R_U/(\rho + R_U)$ et la fonction de transfert est :

$$H(j\omega) = \frac{RR_U}{Z_C{}^2 + 2RZ_C + RR_U + R_u Z_C} = \frac{RR_U C^2\omega^2}{-1 + RR_U C^2\omega^2 - j2RC\omega - jR_U C\omega}$$

On pose $\alpha = R_U/R$ et $x = RC\omega$

$$H(j\omega) = \frac{\alpha R^2C^2\omega^2}{-1 + \alpha R^2C^2\omega^2 - j2RC\omega - j\alpha RC\omega} = \frac{\alpha x^2}{\alpha x^2 - jx(\alpha+2) - 1}$$

C'est un filtre passe-haut dont le gain maximum (pour $\omega = \infty$) est 1. La fréquence de coupure est fonction de la charge.

Exercice 5.2

On cherche l'équivalent Thévenin entre A et B :

$e = E.Z_C/(R + Z_C)$ et $\rho = R + (R // Z_C) = R.(R + 2Z_C)/(R + Z_C)$

La tension de sortie est donc : $s = e.R_U/(\rho + R_U)$ et la fonction de transfert est :

$$H(j\omega) = \frac{Z_C R_U}{R^2 + 2RZ_C + RR_U + R_u Z_C} = \frac{R_U}{2R + R_U + jRC\omega(R + R_U)}$$

$$\|H\| = \frac{R_U}{\sqrt{(2R + R_U)^2 + R^2C^2\omega^2(R + R_U)^2}}$$

C'est un filtre passe-bas dont le gain maximum (pour $\omega = 0$) est : $R_U/(2R + R_U)$.

Exercice 5.3

Une seule cellule non chargée. C'est un passe-haut du 1e ordre qui forme un diviseur de tension idéal (DTI). $H = \frac{V_2}{V_1} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{jx}{1 + jx}$ ($\omega_0 = 1/RC$; $x = \frac{\omega}{\omega_0}$)

Deux cellules. On applique le théorème de Millman en B :

$V_B = \frac{jC\omega(V_1 + V_2)}{2jC\omega + 1/R}$. Donc : $V_B(1 + 2jx) = jx(V_1 + V_2)$

La seconde cellule est un DTI et donc : $V_2 = jx.V_B/(1 + jx) = \frac{(jx)^2(V_1 + V_2)}{(1 + jx)(1 + 2jx)}$

On en déduit l'expression de H_2 (filtre passe-haut du *second* ordre) :

$$H_2 = \frac{V_2}{V_1} = \frac{(jx)^2}{1 + 3jx + (jx)^2}$$

La première cellule est chargée par la seconde et donc $H_2 \neq H_1{}^2$

Trois cellules. On peut écrire (loi des nœuds en B) :

$jC\omega(V_1 - V_B) + jC\omega(V_A - V_B) = V_B/R$

$jRC\omega(V_1 - V_B + V_A - V_B) - V_B = 0$

$jxV_1 + jxV_A = V_B(1 + 2jx)$

De même (loi des nœuds en A) : $jC\omega(V_B - V_A) + jC\omega(V_2 - V_A) = V_A/R$

$jRC\omega(V_B - V_A + V_2 - V_A) - V_A = 0$

$jxV_B + jxV_2 = V_A(1 + 2jx)$

Donc : $$\frac{(jx)^2V_1+(jx)^2V_A}{1+2jx}+(jx)V_2 = V_A(1+2jx)$$

$$V_A = \frac{(jx)^2V_1+jx(1+2jx)V_2}{1+4jx+3(jx)^2}$$

La dernière cellule est un DTI et donc : $(1 + jx)V_2 = (jx)V_A$

$(1 + 4jx + 3(jx)^2)(1 + jx)V_2 = (jx)^3V_1 + (jx)^2(1 + 2jx)V_2$

On tire : $$H_3 = \frac{(jx)^3}{1+5(jx)+6(jx)^2+(jx)^3}$$ (filtre du 3e ordre)

Exercice 5.4

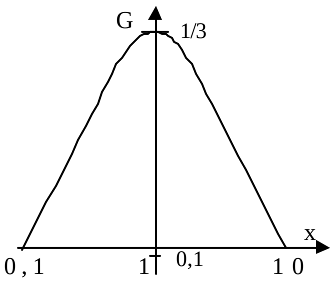
La sortie n'est pas chargée donc R et C forment un diviseur de tension idéal :

$V_S = Z_CV_1/(R + Z_C)$.Le circuit d'entrée est formé de $Z_C + (R //(R +Z_C))$.

En posant $\rho = R(R+Z_C)/(2R + Z_C)$, il vient : $V_1 = V_E.\rho/(\rho + Z_C)$.

La tension de sortie est donc : $V_S = \dfrac{\rho Z_C V_E}{(R+Z_C)(\rho+Z_C)}$. La fonction de transfert est :

$$H = \frac{RZ_C}{R^2+3RZ_C+Z_C^2} = \frac{1}{R/Z_C+Z_C/R+3} = \frac{1}{jRC\omega+1/jRC\omega+3} = \frac{1}{j(x-1/x)+3}$$ Avec :



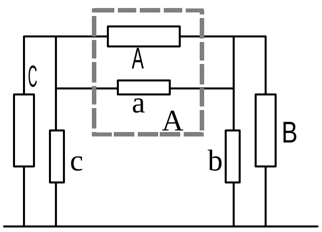
$\omega_0 = 1/RC$; $x = \omega/\omega_0$

Le produit par le complexe conjugué donne le carré de la norme et donc : $\|H\| = \dfrac{1}{\sqrt{9+(x-1/x)^2}}$

C'est un filtre passe-bande du 2e ordre qui est centré sur $\omega_0 = 1/RC$.

Exercice 5.5

On transforme le circuit en deux Π reliés en // avec le théorème de Kennelly :



Impédances du 1e Π (issu du T formé de C, C et R/2) :

$A = 2(Z_C^2 + RZ_C)/R$. $B = C = Z_C + R$

Impédances du 2e Π : (T formé de R, R et 2C)

En remarquant que $Z(2C) = Z_C/2$, on tire :

$a = 2(R^2 + RZ_C)/Z_C$. $b = c = Z_C + R$

$A = A // a = \dfrac{2RZ_C(R+Z_C)}{R^2+Z_C^2}$. $B = B // b = ½(Z_C + R)$

La sortie n'est pas chargée donc A et B forment un DTI : $V_S = B.V_E/(A + B)$

$$H = \frac{R^2+Z_C^2}{R^2+Z_C^2+4RZ_C} = \frac{1-R^2C^2\omega^2}{1+4jRC\omega-R^2C^2\omega^2}$$

2e méthode (théorème de Millman) :

$$V_A = \frac{jC\omega(V_1+V_2)}{2jC\omega+2/R} = \frac{jCR\omega(V_1+V_2)}{2(jCR\omega+1)} = \frac{jx(V_1+V_2)}{2(jx+1)}$$ (On pose $x = RC\omega$)

De même : $$V_B = \frac{(V_1+V_2)/R}{2jC\omega+2/R} = \frac{(V_1+V_2)}{2(jCR\omega+1)} = \frac{(V_1+V_2)}{2(jx+1)}$$

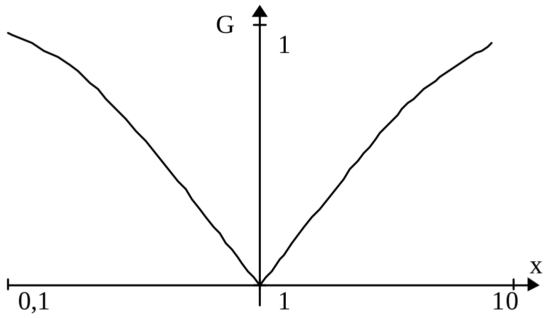
La nullité du courant I_2 implique : $jC\omega(V_A - V_2) + (V_B - V_2)/R = 0$

$jx.V_A - jx.V_2 + V_B - V_2 = 0$. On remplace alors V_A et V_B par leurs expressions.

$(jx)^2.V_1 + (jx)^2.V_2 - 2jx(1 + jx).V_2 + V_1 + V_2 - 2(1 + jx).V_2 = 0$

$$H = \frac{1+(jx)^2}{1+4(jx)+(jx)^2} \Rightarrow H(x) = \frac{1-x^2}{(1-x^2)+4jx} = \frac{1}{1+4jx/(1-x^2)}$$

$$H(\tfrac{1}{x}) = \frac{1}{1+4\dfrac{j}{x}/(1-(\tfrac{1}{x})^2)} = \frac{1}{1-4jx/(1-x^2)}$$



$H(1/x) = H^*(x)$: il y a symétrie par rapport à $x = 1$ (ou à $\mathrm{Log}(x) = 0$)

La norme du gain est :

$$\|H\| = \frac{\|1-x^2\|}{\sqrt{(1-x^2)^2+16x^2}}$$

C'est un filtre coupe-bande d'ordre 2 centré sur $\omega_0 = 1/RC$

Exercice 5.6

On transforme avec le théorème de Kennelly le triangle L, C, C en une étoile Z_1, Z_2 et Z_3, Z_3 étant en série avec R. Il n'y a pas de charge sur la sortie donc le courant dans Z_2 est nul : on a un diviseur de tension idéal formé de Z_1 et de $(R + Z_3)$.

$$H = \frac{R+Z_3}{Z_1+R+Z_3} \quad \text{avec : } Z_1 = Z_2 = \frac{Z_L Z_C}{Z_L+2Z_C} \text{ et } Z_3 = \frac{Z_C{}^2}{Z_L+2Z_C}$$

$$H = \frac{Z_C{}^2 + RZ_L + 2RZ_C}{Z_C Z_L + Z_C{}^2 + RZ_L + 2RZ_C} = \frac{-\dfrac{1}{C^2\omega^2} + R(r+jL\omega) + \dfrac{2R}{jC\omega}}{\dfrac{L}{C} - \dfrac{1}{C^2\omega^2} + R(r+jL\omega) + \dfrac{2R}{jC\omega}}$$

H est nul si : $Rr = 1/C^2\omega^2$ et si $RL\omega = 2R/C\omega$. On déduit :

$$R_0 = \frac{1}{rC^2\omega^2} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} \qquad R_0 = 6{,}2\ \text{k}\Omega \text{ et } \omega_0 = 2.10^3 \text{ Rd/s.}$$

Pour $\omega = 0$ et $\omega \Rightarrow \infty$, on a : $|H| = 1$ et pour $\omega = \omega_0$, $H = 0$

C'est un filtre coupe bande centré sur ω_0.

Exercice 5.7

$$\begin{cases} -V_1 + Z_C I_1 + Z_L(I_1+I_2) = 0 \\ -V_2 + Z_C I_2 + Z_L(I_1+I_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_C + Z_L & Z_L \\ Z_L & Z_C + Z_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

L'impédance d'entrée est : $Z_E = Z_{11} - \dfrac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}+Z_0}$ (voir aussi la page 36)

En effet : $\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = -Z_0 I_2 \end{cases} \Rightarrow I_2 = -\dfrac{Z_{21}I_1}{Z_0+Z_{22}}$

$$Z_0 = Z_C + Z_L - \frac{Z_L^2}{Z_C+Z_L+Z_0} \Rightarrow Z_0^2 = Z_C^2 + 2Z_C.Z_L = \frac{L}{C} - \frac{1}{4C^2\omega^2}$$

On met en évidence la fréquence de coupure $\omega_C = \dfrac{1}{2\sqrt{LC}}$. Pour les fréquences inférieures, Z_0 est une résistance pure. Au-dessus ce doit être une réactance pure.

Deuxième montage :

Cette fois, on a : $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_C + Z_L & Z_C \\ Z_C & Z_C + Z_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$

$$Z_E = Z_C + Z_L - \frac{Z_C^2}{Z_C + Z_L + Z_0} \quad \Rightarrow \quad Z_0^2 = Z_L^2 + 2Z_C.Z_L = \frac{L}{C} - \frac{L^2\omega^2}{4}$$

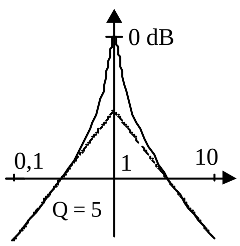
On met en évidence la fréquence de coupure $\omega_C = \dfrac{2}{\sqrt{LC}}$. Pour les fréquences inférieures, Z_0 est une réactance pure. Au-dessus ce doit être une résistance pure.

Exercice 5.8

Les deux condensateurs forment un DTI ; en posant $C = C_1C_2/(C_1 + C_2)$, on a :

$V_2 = V_A.C/C_2$

R est en série avec (L // C). On forme un DTI entre l'entrée et le point A :



On pose $Y = 1/jL\omega + jC\omega = 1/Z$

$$V_A = \frac{Z}{R+Z} V_1 = \frac{V_1}{1 + R/Z} = \frac{V_1}{1 + R(1/jL\omega + jC\omega)}$$

Soit : $H = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{V_2}{V_A}\dfrac{V_A}{V_1} = \dfrac{C/C_2}{1 + j(RC\omega - R/L\omega)}$

On pose $K = C/C_2$ et $LC\omega_0 = 1 \Rightarrow \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

On définit $Q = RC\omega_0 = R/L\omega_0 = R\sqrt{C/L}$.

Il vient : $H = \dfrac{K}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$. C'est un passe-bande d'ordre 2 dont l'acuité est fonction de Q (le facteur de qualité est en général défini par $Q = L\omega_0/R$).

Exercice 5.9

Les deux inductances forment un DTI ; on pose $L = L_1 + L_2$. $V_2 = V_A.L_2/L$

R est en série avec (L // C). On forme un DTI entre l'entrée et le point A :

On pose $Y = 1/jL\omega + jC\omega = 1/Z$

Comme dans l'exercice 5.8, on tire : $H = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{L_2/L}{1 + j(RC\omega - R/L\omega)}$

En posant $K = L_2/L$, $LC\omega_0 = 1$ et $Q = RC\omega_0 = R/L\omega_0 = R\sqrt{C/L}$, on obtient la même expression que pour l'exercice 5.8

Ces deux filtres sont utilisés pour réaliser des oscillateurs haute fréquence.